Exercice 1.

1. Soit $f : V \to W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens. Montrer que si $\mathscr{B} = \{v_1, \dots v_n\} \subset V$ est une base quelconque et $\mathscr{B}' = \{w_1, \dots w_m\} \subset W$ est une base orthonormée, alors la matrice de f dans ces bases est donnée par
$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{où} \quad a_{i,j} = \langle w_i, f(v_j)\rangle.$$
2. Soient $\mathscr{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ et $\mathscr{B}' = \{w_1, \dots w_n\}$ deux bases d'un espace vectoriel euclidien V. On suppose que la base $\mathscr{B}$ est orthonormée et on note P la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Montrer que P est une matrice orthogonale si et seulement si la base $\mathscr{B}'$ est aussi orthonormée.

Exercice 2. Répondre à chacune des questions suivantes.

a) Soit $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q), avec $0 \leq p \leq n$. Existe-t-il des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tels que $g(v, v) = 0$?
   - ☐ Oui, toujours.
   - ☐ Non, jamais.
   - ☐ Cela dépend de la valeur de p.

b) Soit $g : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique sur un K-espace vectoriel V. Laquelle des assertions suivantes est correcte ?
   - ☐ Si g est non-dégénérée, alors pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, le covecteur $\theta \in V^*$ défini par $\theta(w) = g(v, w)$ est non nul.
   - ☐ S'il existe $u, v \in V$ tels que $g(u, v) \neq 0$, alors g est non-dégénérée.
   - ☐ Si g est non-dégénérée, alors il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que le covecteur $\theta \in V^*$ défini par $\theta(w) = g(v, w)$ est nul.

Rappelons la définition : Une forme bilinéaire g sur un espace vectoriel V est *non-dégénérée* si la condition $g(x, y) = 0\ \forall y \in V$ implique $x = 0$.

Exercice 3.

1. Prouver que deux matrices symétriques congruentes A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ont même rang (où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque).
2. Prouver que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice symétrique complexe de rang r, alors A est congruente à une matrice diagonale de rang r dont les coefficients valent 0 ou 1. Plus précisément $d_{ii} = +1$ pour $1 \leq i \leq r$ où r est le rang de A et tous les autres coefficients sont nuls.

Exercice 4. Soit $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ la forme quadratique standard de signature $(1, 1)$ sur $\mathbb{R}^2$. Prouver que $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ est une base de Sylvester si et seulement s'il existe $s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que
$$u = \begin{pmatrix} \varepsilon \cosh(s) \\ \sinh(s) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v = \pm \begin{pmatrix} \sinh(s) \\ \varepsilon \cosh(s) \end{pmatrix}$$

où $\cosh(s) = \dfrac{1}{2}\left(e^s + e^{-s}\right)$ et $\sinh(s) = \dfrac{1}{2}\left(e^s - e^{-s}\right)$ sont les fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

Exercice 5.

1. Rappeler les notions de cône isotrope, d'*indicatrice positive* et d'*indicatrice négative* d'une forme quadratique Q sur un espace vectoriel réel.
2. Démontrer que ces ensembles déterminent complètement la forme quadratique Q i.e. si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques telles que
$$S_0(V, Q_1) = S_0(V, Q_2), \quad S_+(V, Q_1) = S_+(V, Q_2), \quad S_-(V, Q_1) = S_-(V, Q_2),$$
alors $Q_1 = Q_2$.
3. Soit $f : V \to V$ un automorphisme linéaire. Montrer que $f \in O(Q)$ si et seulement si les indicatrices et le cône de lumière sont invariants par f, c'est-à-dire
$$f(S_+(V, Q)) = S_+(V, Q), \quad f(S_-(V, Q)) = S_-(V, Q) \quad \textbf{et} \quad f(S_0(V, Q)) = S_0(V, Q).$$
(Rappelons que $f \in O(Q)$ signifie que $Q(f(x)) = Q(x)$ pour tout $x \in V$).

Exercice 6. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

1. Toute matrice réelle symétrique définie positive est inversible.
2. Deux matrices symétriques congruentes ont même déterminant.
3. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel V telle que $Q(e_i) > 0$ pour tous les vecteurs d'une base de V. Peut-on déduire que Q est définie positive ?
4. Une forme quadratique Q sur un espace vectoriel réel V est définie positive si et seulement si $\sqrt{Q}$ est la norme associée à un produit scalaire.

Exercice 7. On considère la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$.

1. Ecrire la forme bilinéaire symétrique β associée (obtenue par polarisation de Q).
2. Ecrire la matrice de Gram B de cette forme bilinéaire dans la base canonique.
3. Trouver une base orthonormée généralisée (base de Sylvester) $\{u_1, u_2\}$ pour Q.
4. Quelle est la signature de Q ?
5. Effectuer la diagonalisation orthonormale de B (i.e. trouver une matrice orthogonale $P \in O(2)$ telle que $P^\top BP$ est diagonale).

Exercice 8. Trouver le rang et la signature de la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est-elle définie positive ?

Exercice 9. Soit $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r \geq 1$ dont les valeurs singulières sont $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ (cf. exercice 11.8). On supposera sans perte de généralité que $\mu_i \neq 0$ si $1 \leq i \leq r$.

1. Montrer qu'il existe des bases orthonormées $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ et $\{w_1, \dots, w_m\} \subset \mathbb{R}^m$ telles que $Av_i = \mu_i w_i$ si $1 \leq i \leq r$ et $Av_i = 0$ si $i > r$.

   Indication. On peut prendre pour $\{v_i\}$ une base propre orthonormée pour la matrice $G = A^\top A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire qu'il existe des matrices orthogonales $P \in O(n)$ et $Q \in O(m)$ telles que

$$AP = QD, \quad \text{où} \quad D = \left(\begin{array}{cccc|c} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_r & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Remarque. La décomposition $A = QDP^\top$ s'appelle la *décomposition en valeurs singulières* de la matrice A et joue un rôle important dans un certains nombre de problèmes de géométrie et de compression de l'information. Noter que A et D sont des matrices de même taille (qui peut être rectangulaire).